Rozdział 5

Powierzchnie w przestrzeni Euklidesowej w $\boldsymbol{E}^3$

5.1 Powierzchnia i jej przedstawienia parametryczne

Definicja 5.1. Zbiór $X \subset \boldsymbol{E}^3$ punktów przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}^3$ nazywamy płatem prostym, jeżeli istnieje odwzorowanie f wzajemnie jednoznaczne i ciągłe domkniętego prostokąta D na zbiór X.
Wprowadzamy w przestrzeni $\boldsymbol{E}^3$ prostokątny układ osi współrzędnych i rozważmy zbiór punktów X punktów $(x^1, x^2, x^3) \in \boldsymbol{E}^3$ takich, że $x^3 = f(x^1, x^2)$, gdzie f jest funkcją określoną i ciągłą w domkniętym prostokącie

$$\mathcal{D} = \{(x^1, x^2) : \; x^1 \in [a, b] \wedge x^2 \in [c, d]\}$$

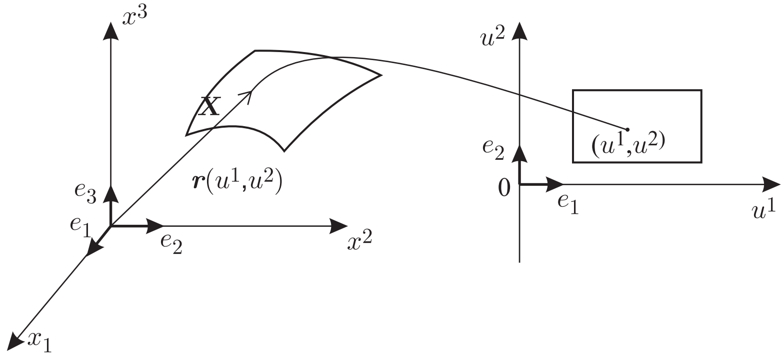
Tak określony zbiór X jest przykładem płata prostego. Rozważmy przestrzeń $\boldsymbol{E}^2$ odniesioną do prostokątnego układu osi współrzędnych, której elementami są punkty (u^1, u^2). Wówczas płat prosty X możemy traktować jako hodograf ciągłej i różnowartościowej funkcji wektorowej

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2) = [x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)] \tag{5.1}$$

określonej w domkniętym prostokącie $\mathcal{D}$ (patrz rys. 5.1).

Definicja 5.2. Funkcję $\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ występującą we wzorze (5.1) nazywamy przedstawieniem parametrycznym płata X, zaś równanie (5.1) nazywamy równaniem parametrycznym tego płata, przy czym u^1 i u^2 nazywamy parametrami.
Płatem prostym nie jest np. sfera lub powierzchnia boczna walca.

Definicja 5.3. Powierzchnią nazywamy zbiór S punktów przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}^3$, jeżeli każdy punkt $P \in S$ ma otoczenie V w zbiorze S homeomorficzne



Rysunek 5.1.

z podzbiorem otwartym przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}^2$. Odwzorowanie f nazywamy homeomorfizmem gdy f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym oraz odwzorowania f i f^{-1} są ciągłe.

Definicja 5.4. Otoczenie V punktu P w zbiorze S nazywamy część wspólną zbioru S i otwartego zbioru przestrzeni $\boldsymbol{E}^3$, zawierającego punkt P.
Przykładem powierzchni może być np. sfera lub powierzchnia boczna walca.
Omówimy teraz sposoby określenia powierzchni w przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}^3$.
Powierzchnie w przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}^3$ można określić w następującej postaci:

– postać jawna:

$$x^3 = x^3(x^1, x^2) \quad \text{lub} \quad z = f(x, y) \tag{5.2}$$

– postać uwikłana:

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{lub} \quad F(x, y, z) = 0 \tag{5.3}$$

– postac parametryczna:

$$\begin{aligned} &x^1 = x^1(u^1, u^2), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2) \text{ lub} \\ &x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2) \end{aligned} \tag{5.4}$$

– postać wektorowa:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) = [x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)] \tag{5.5}$$

Definicja 5.5. Mówimy, że powierzchnia S jest kalsy C^n, jeżeli każdy jej punkt ma otoczenie V w S, dla którego istnieje przedstawienie parametryczne (5.1) klasy C^n.

Definicja 5.6. Punkt P powierzchni (odpowiadający parametrom u_0^1, u_0^2) nazywa się regularnym jeżeli

$$\boldsymbol{r}_1(u_0^1, u_0^2) \times \boldsymbol{r}_2(u_0^1, u_0^2) \neq 0 \tag{5.6}$$

gdzie

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$$

W przeciwnym razie (tzn. jeżeli w danym punkcie dla każdej parametryzacji $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = 0$) punkt nazywa się osobliwym.

Definicja 5.7. Powierzchnia nazywa się powierzchnią regularną w pewnym otoczeniu, jeżeli wszystkie jej punkty leżące w tym otoczeniu są regularne.

Uwaga 5.1. Jeżeli zamiast równania parametrycznego $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ rozpatrywać będziemy postać parametryczną (5.1), to warunek (5.6) sprowadzi się do postaci

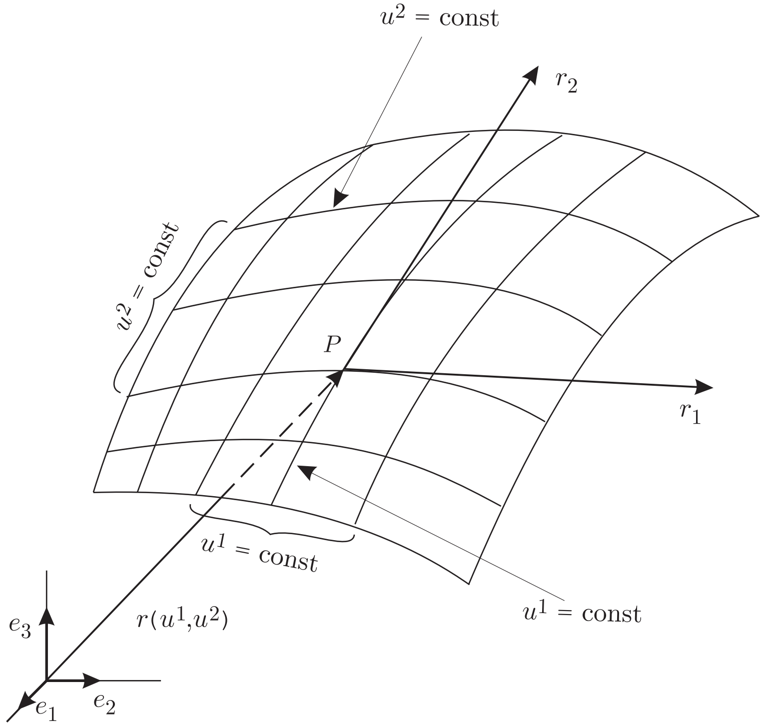
$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} = 2 \tag{5.7}$$

gdzie $x_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^j}$ $k, j = 1, 2$.
Punktami osobliwymi mogą być np. ostrza powierzchni w rodzaju wierzchołka stożka. Punkty te również mogą się układać wzdłuż pewnych linii i np. stanowić krawędzie, wzdłuż których powierzchnia się załamuje (krawędzie zwrotu).

5.2 Współrzędne krzywoliniowe (współrzędne Gaussa)

Przy danym przedstawieniu parametrycznym $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ wartości parametrów u^1, u^2 określają położenie punktu na powierzchni.

Definicja 5.8. Parametry u^1, u^2 noszą nazwę współrzędnych krzywoliniowych lub współrzędnych Gaussa na powierzchni.
Jeżeli ustalimy wartość jednej współrzędnej np. u^2, a drugą u^1 będziemy zmieniali, to odpowiednie punkty będą leżały na linii określonej równaniem $u^2 = \text{const}$, którą nazywamy linią współrzędnej u^1 lub krócej linią u^1 (jest to na ogół linia krzywa, stąd nazwa „współrzędne krzywoliniowe"). Wszystkie linie u^1 (dla różnych ustalonych u^2) tworzą rodzinę, z której żadna para nie przecina się w obszarze nie zawierającym punktów osobliwych danej parametryzacji.
Linie $u^1 = \text{const}$ przy zmiennym u^2, zwane liniami współrzednej u^2, tworzą podobną rodzinę. Obie rodziny razem tworzą siatkę linii współrzędnych na powierzchni. Przez każdy regularny punkt danej parametryzacji przechodzi dokładnie po jednej krzywej z każdej rodziny (patrz rys. 5.2).



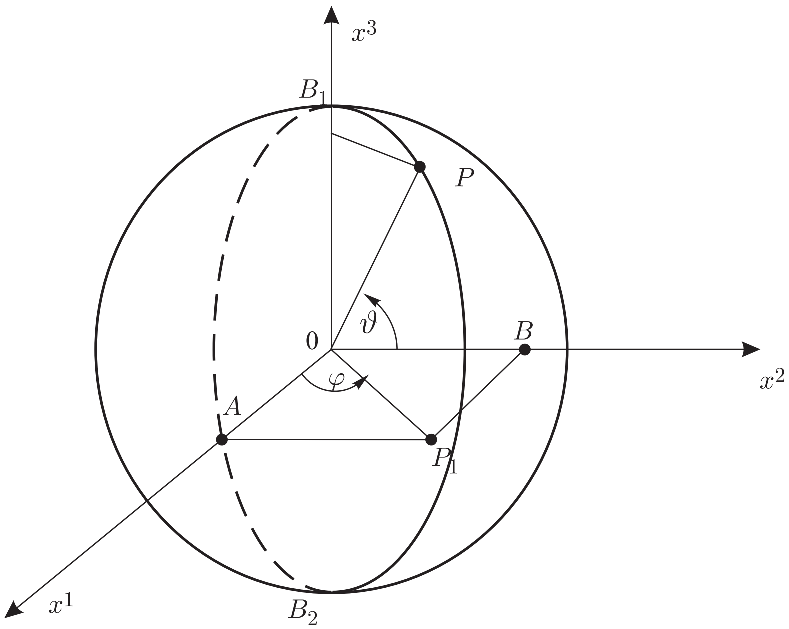
Rysunek 5.2.

Przykład 5.1. [płaszczyzna] Wybierając odpowiednio układ wspłrzędnych w przestrzeni możemy płaszczyznę przedstawić równaniem

$$x = u^1, \quad y = u^2, \quad z = 0$$

przy czym u^1, u^2 są w tym przypadku zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi na płaszczyźnie i będziemy je zwykle oznaczać jako x i y. Czyli mamy $\boldsymbol{r} = [u^1, u^2, 0]$.

Przykład 5.2. [współrzędne geograficzne na sferze] Rozważmy sferę o środku w początku układu i promieniu a : $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2$.
Położenie punktu P na sferze S określimy za pomocą dwóch współrzędnych: szerokości i długości geograficznej, w tym celu przez P i oś $0x^3$ poprowadzimy płaszczyznę (płaszczyznę południka) i długością geograficzną nazwiemy kąt φ od płaszczyzny x^1x^3 do skonstruowanej płaszczyzny mierzony w kierunku dodatnim (od osi $0x^1$ do $0x^2$).
Szerokość geograficzna określa położenie punktu na wybranym południku. Jest nią kąt ϑ utworzony przez prostą OP z płaszczyzną x^1x^2, liczony ze znakiem „+", gdy P leży na górnej półkuli i ze znakiem „$-$" w przeciwnym przypadku. Obie współrzędne okreśjają całkowicie położenie punktu na sferze. Zmieniając



Rysunek 5.3.

ϑ, φ w przedziałach $-\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ otrzymujemy całą sferę. Dla biegunów (punktów przecięcia z osię $0x^3$) jest $\vartheta = \pm\pi/2$, zaś φ nie jest jednoznacznie określony.

Oznaczmy przez x^1, x^2, x^3 współrzędne punktu P. Mamy $0P_1 = a\cos\vartheta$, $0A = a\cos\vartheta\cos\varphi$, $0B = a\cos\vartheta\sin\varphi$, $0C = \sin\vartheta$, gdzie P_1 – rzut prostokątny punktu P na płaszczyznę $0x^1x^2$, A, B – rzuty prostokątne punktu P_1 na osie $0x^1$ i $0x^2$ odpowiednio. Zatem równania parametryczne sfery mają postać

$$x^1 = a\cos\vartheta\cos\varphi, \quad x^2 = a\cos\vartheta\sin\varphi, \quad x^3 = a\sin\vartheta \tag{5.8}$$

Obliczając $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, w tym wypadku $\boldsymbol{r}_\vartheta \times \boldsymbol{r}_\varphi$, otrzymamy macierz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a\sin\vartheta\cos\varphi, & -a\sin\vartheta\sin\varphi, & a\cos\vartheta \\ -a\cos\vartheta\sin\varphi, & a\cos\vartheta\cos\varphi, & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Jak łatwo zauważyć rang $\boldsymbol{A}=2$, poza biegunam i $(\vartheta=\pm\pi/2)$, w których rang $\boldsymbol{A}=1$. Zatem punkty B_1, B_2 są punktami osobliwymi danego przedstawienia parametrycznego. Można wykazać, że punkty B_1 i B_2 nie są punktami osobliwymi sfery. Wystarczy w tym celu przyjąć np. płaszczyznę $0x^1x^3$ jako płaszczyznę równika i wyznaczyć przedstawienie parametryczne tej sfery analogiczne do podanego wyżej.