Rozdział 3

Algebra liniowa

W tym rozdziale zajmiemy się badaniem własności pewnej struktury algebraicznej, zwanej przestrzenią liniową (wektorową), stanowiącej uogólnienie klasycznej geometrii euklidesowej. Wprowadzane określenia pozwolą przenieść między innymi pewne geometryczne własności pojęcia wektora na obiekty takie jak macierze, wielomiany, funkcje, itp.

3.1 Przestrzenie liniowe

W pierwszym kroku zdefiniujemy strukturę algebraiczną zbudowaną z niepustego zbioru elementów nazywanych wektorami, w której określamy dwa działania: dodawanie wektorów i mnożenie wektora przez skalar w taki sposób, by spełnione były np. podstawowe własności obu tych działań w klasycznym rachunku wektorów na płaszczyźnie. Wprowadzamy następujące pojęcie.

Definicja 3.1.1. *(Przestrzeń liniowa) Niech struktura* $(X, \oplus, \otimes, e, f)$ *będzie ciałem. Przez przestrzeń liniową (wektorową)* $\mathbb{V}$ *nad ciałem* X *nazywamy strukturę algebraiczną* $(\mathbb{V}, X, \Box, \bullet)$ *złożoną ze zbioru* $\mathbb{V}$*, którego elementy nazywamy wektorami, z działaniem wewnętrznym dodawania* $\mathbb{V}^2 \ni (u, v) \to u\Box v$ *o własnościach:*

- *L1:* $\forall\ u, v, w \in \mathbb{V}\ \ (u\Box v)\Box w = u\Box(v\Box w)$ *- działanie* $\Box$ *jest łączne,*
- *L2:* $\exists\ 0 \in \mathbb{V}\ \ \forall\ u \in \mathbb{V}\ \ 0\Box u = u\Box 0 = u$ *- istnieje wektor* 0 *będący modułem dodawania wektorów* $\Box$*,*
- *L3:* $\forall\ u \in \mathbb{V}\ \ \exists\ (-u) \in \mathbb{V}\ \ u\Box(-u) = (-u)\Box u = 0$ *- wektor* $(-u)$ *nazywamy wektorem przeciwnym (elementem przeciwnym) do* u*,*

L4: $\forall\, u, v \in \mathbb{V}\;\; u\Box v = v\Box u$ *- dodawanie wektorów* $\Box$ *jest przemienne.*

(struktura $(\mathbb{V}, \Box, 0)$ *jest addytywną grupą abelową)*
oraz z działaniem zewnętrznym (p. [6]) $X \times \mathbb{V} \ni (x, u) \to x \bullet u \in \mathbb{V}$ *mnożenia wektora* u *przez skalar* x *o własnościach:*

L5: $\exists\, 1 \in X \;\;\forall\, u \in \mathbb{V}\;\; 1 \bullet u = u,$

L6: $\forall\, x, y \in X \;\;\forall\, u \in \mathbb{V}\;\; x \bullet (y \bullet u) = (x \otimes y) \bullet u,$

L7: $\forall\, x \in X\; \forall\, u, v \in \mathbb{V}\;\; x \bullet (u\Box v) = (x \bullet u)\Box(x \bullet v)$ *– działanie mnożenia wektora przez skalar* $\bullet$ *jest rozdzielne względem dodawania wektorów* $\Box$*,*

L8: $\forall\, x, y \in X\; \forall\, u \in \mathbb{V}\; (x \oplus y) \bullet u = (x \bullet u)\Box(y \bullet u)$ *– działanie mnożenia przez skalar* $\bullet$ *jest rozdzielne względem dodawania skalarów* $\oplus$*.*

W dalszych rozważaniach przez ciało skalarów, nad którym określona jest przestrzeń wektorowa, będziemy rozumieć dowolne ciało (w tym ciała skończone). Domyślnie jednak jako ciało skalarów będziemy w dalszych rozważaniach przyjmować zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$. Rozpatrzmy następujące przykłady.

Przykład 3.1.1.

1^0 *Dowolne ciało* X *jest przestrzenią liniową nad samym sobą. Rzeczywiście modułem dodawania wektorów jest moduł dodawania w ciele* X*, podobnie własność L5) spełnia moduł mnożenia w ciele* X*.*

2^0 *Zbiór macierzy ustalonego wymiaru o elementach zespolonych z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar zespolony, a więc struktura* $(\mathbb{C}^{m\times n}, +, \cdot)$ *jest przestrzenią wektorową nad* $\mathbb{C}$*. Modułem dodawania macierzy jest macierz* $\mathbb{O}_{m\times n}$*, a liczba rzeczywista* 1 *jest jedyną spełniącą warunek L5).*

3^0 *Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych do stopnia* $n \geq 1$ *oznaczymy* $\mathbb{R}_n[x]$*. Zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej* n *z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianów przez liczbę rzeczywistą jest przestrzenią liniową nad* $\mathbb{R}$*, w której modułem dodawania jest wielomian zerowy, a wielomian stopnia* 0 *równy* 1*, jako jedyny, spełnia aksjomat L5).*

4^0 *Nad dowolnym ciałem* $\mathbb{X}$ *można rozpatrywać przestrzeń liniową jednoelementową* $V = \{0\}$*, którą nazywamy przestrzenią zerową, gdy mnożenie przez skalar* x *jest określone następująco* $\forall\, x \in \mathbb{X}\quad x \cdot 0 = 0$*. Modułem dodawania jest wektor zerowy, a elementem spełniającym wymóg L5) jest dowolny element ciała* $\mathbb{X}$*.*

5^0 *Niech* $V^n = \mathbb{X}^n$ *będzie zbiorem macierzy (kolumn) wymiaru* $n \times 1$ *w postaci* $u = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$ *o elementach z* X*. W tym zbiorze określamy standardowe działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę. Strukturę* $(V^n, \mathbb{X}, +, \cdot)$ *nazywamy* ***przestrzenią liniową algebraiczną***[1]***.***

6^0 *Niech* $\mathbb{V}$ *oznacza zbiór wszystkich wektorów*[2] *płaszczyzny „zaczepionych" w jednym ustalonym „punkcie" płaszczyzny. Zbiór liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *niech będzie ciałem skalarów. W zbiorze* $\mathbb{V}$ *definiujemy działanie dodawania wektorów zgodnie z regułą równoległoboku oraz działanie mnożenia wektora przez liczbę rzeczywistą rozumiane jak następuje:*

- *moduł skalara jest współczynnikiem proporcjonalności zmiany długości wektora,*
- *mnożenie przez skalar różny od* 0 *zachowuje kierunek wektora, a jego zwrot ulega zmianie przy mnożeniu wektora przez liczby ujemne,*
- *dowolny wektor pomnożony przez* 0 *jest wektorem zerowym, który jest równoległy do każdego wektora płaszczyzny.*

□

Poniżej udowodnimy podstawowe własności przestrzeni wektorowych.

Twierdzenie 3.1.1. *Jeżeli* $(\mathbb{V}, \mathbb{X}, \Box, \bullet)$ *jest przestrzenią wektorową, to dla dowolnych* $x \in \mathbb{X}$ *i* $u \in \mathbb{V}$ *mamy:*

a) $e \bullet u = 0$,

b) $x \bullet 0 = 0$,

c) $(-1) \bullet u = -u$,

d) $x \bullet u = 0 \Longrightarrow x = e \vee u = 0$.

Dowód. Dla dowolnych $e \neq x \in \mathbb{X}$ i $0 \neq u \in \mathbb{V}$ mamy:

Ad a) $0 \Box (e \bullet u) \overset{L2)}{=} e \bullet u = (e \oplus e) \bullet u \overset{L8)}{=} (e \bullet u) \Box (e \bullet u) \overset{\text{p. skreśleń}}{\Longrightarrow} e \bullet u = 0,$

Ad b) $0 \Box (x \bullet 0) \overset{L2)}{=} x \bullet 0 \overset{L3)}{=} x \bullet (0 \Box 0) \overset{L7)}{=} (x \bullet 0) \Box (x \bullet 0) \overset{\text{p. skreśleń}}{\Longrightarrow} x \bullet 0 = 0,$

---

[1] W przypadku gdy rozważamy przestrzeń wektorową macierzy nad dowolnym ciałem $\mathbb{X}$, będziemy też używać oznaczenia $\mathbb{X}^{n \times 1}$.

[2] Mamy tu na myśli obiekty geometryczne posiadające takie atrybuty jak długość, kierunek i zwrot.

Ad c) $0 \stackrel{a)}{=} e \bullet u = (1 \oplus (-1)) \bullet u \stackrel{L5),L8)}{=} u\Box((-1) \bullet u) \stackrel{L3)}{\Longrightarrow} (-1) \bullet u = -u$,

Ad d) W pierwszym kroku przyjmijmy, że $x \bullet u = 0$ i $x \neq e$, wówczas $u = (x^{-1} \otimes x) \bullet u \stackrel{L6)}{=} x^{-1} \bullet (x \bullet u) = x^{-1} \bullet 0 \stackrel{b)}{=} 0$, zatem $u = 0$. W następnym kroku przyjmijmy, że $x \bullet u = 0$ i $u \neq 0$ oraz $x \neq e$. W konsekwencji istnieje w ciele $\mathbb{X}$ element odwrotny $x^{-1} \neq e$ względem mnożenia do x, a stąd otrzymujemy

$$0 \neq u = (x^{-1} \otimes x) \bullet u \stackrel{L6)}{=} x^{-1} \bullet (x \bullet u) = x^{-1} \bullet 0 \stackrel{b)}{=} 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem. Wobec tego $x = e$.

□

Korzystając z powyższego twierdzenia, udowodnimy następujący wniosek.

Wniosek 3.1.1. *Jeżeli* $(\mathbb{V}, \mathbb{X}, \Box, \bullet, 0, 1)$ *jest niezerową przestrzenią wektorową nad ciałem skalarów* $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, e, f)$*, to* $f = 1$.

Dowód. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{X}$, w której istnieje różny od wektora zerowego wektor $0 \neq u \in \mathbb{V}$, oraz niech $f \neq 1$. Na mocy warunków $L5$) i $L6$) oraz aksjomatów ciała (p. def. 2.1.8) otrzymujemy lewą stronę aksjomatu $L6$) dla $x = 1$ i $y = f$ w postaci $L = 1 \bullet (f \bullet u) \stackrel{L5)}{=} f \bullet u$, podobnie prawa strona własności $L6$) ma postać $P = (1 \otimes f) \bullet u = 1 \bullet u \stackrel{L5)}{=} u$, w konsekwencji otrzymujemy $(*)\, f \bullet u = u$. Z drugiej strony struktura $(\mathbb{V}, \Box, 0)$ jest grupą przemienną, zatem dla $u \in \mathbb{V}$ istnieje $(-u) \in \mathbb{V}$ takie, że na podstawie twierdzenia 3.1.1 podpunkty c) i d) otrzymujemy $0 \stackrel{L3)}{=} u\Box(-u) \stackrel{c),(*)}{=} (f \bullet u)\Box((-1) \bullet u) \stackrel{L8)}{=} (f \oplus (-1))\Box u) \stackrel{d)}{\Rightarrow} f \oplus (-1) = 0 \vee u = 0$. Drugi składnik alternatywy jest sprzeczny z założeniem, zatem $f \oplus (-1) = 0 \Longrightarrow f = 1$, co kończy dowód twierdzenia. □

Jak zapewne zauważył skrupulatny Czytelnik, w dotychczasowych rozumowaniach wyraźnie odróżnialiśmy moduły działań ciała $\mathbb{X}$ od wektora zerowego 0 czy też elementu ciała $1 \in \mathbb{X}$. W dalszych rozważaniach przyjmiemy następującą umowę zawartą w poniższej uwadze.

Uwaga 3.1.1. *O ile to nie będzie wyraźnie podkreślone, w dalszych rozważaniach mówiąc o przestrzeni wektorowej, mamy na myśli przestrzenie wektorowe niezerowe.*

Ze względu między innymi na powyższą uwagę oraz domyślne przyjmowanie umowy, że $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, zrezygnujemy z rozróżniania modułów e i f ciała $\mathbb{X}$ od modułu dodawania wektorów (wektora zerowego), pisząc po prostu 0 i 1. Czytelnik jedynie z kontekstu będzie mógł wnioskować, jaki element w rozważaniach mamy na myśli[3]. Podobnie postąpimy z uproszczeniem oznaczeń działań w przestrzeni wektorowej $\mathbb{V}$ i ciele $\mathbb{X}$, mianowicie mówiąc o dodawaniu będziemy pisać znak $+$, a w przypadku mnożenia znak $\cdot$ lub brak jakiegokolwiek symbolu między argumentami działania. Dodatkowo w odniesieniu do modułu mnożenia 1 w ciele $\mathbb{X}$ w kontekście mnożenia wektora przez ten skalar będziemy używać sformułowania „ **jedynka mnożenia przez skalar**” Poniżej wprowadzimy kolejne pojęcia opisujące własności przestrzeni wektorowych.

Definicja 3.1.2. *(Podprzestrzeń wektorowa)*
Przestrzeń liniową $\mathbb{V}_1$ nazywamy ***podprzestrzenią liniową*** *przestrzeni $\mathbb{V}$, gdy:*

1^0 $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$,

2^0 *obie przestrzenie są określone nad tym samym ciałem,*

3^0 *działania na wektorach w przestrzeni $\mathbb{V}_1$ są identyczne z działaniami na tych samych wektorach w przestrzeni $\mathbb{V}$.*

Poniższe twierdzenie stanowi bardzo użyteczne kryterium badania, czy dany podzbiór jest podprzestrzenią wektorową.

Twierdzenie 3.1.2. *Niepusty podzbiór $V_1 \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wektorowej $(V, \mathbb{X}, +, \cdot, 0, 1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:*

$$\forall\, u, v \in V_1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{X} \quad u + v \in \mathbb{V}_1 \;\wedge\; x \cdot u \in \mathbb{V}_1.$$

Innymi słowy wystarczy pokazać, że podzbiór V_1 jest zamknięty ze względu na działania dodawania i mnożenia przez skalar w przestrzeni V.

Dowód. W przypadku, gdy $\mathbb{V}_1$ jest przestrzenią zerową lub gdy $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}$, twierdzenie jest oczywiste. Przyjmijmy zatem, że $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ i nie jest to żaden z uprzednio wymienionych przypadków.

„$\Rightarrow$” Niech $\mathbb{V}_1$ będzie podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{V}$, wówczas na mocy definicji podprzestrzeni wektorowej (p. def. 3.1.2) podprzestrzeń $\mathbb{V}_1$ jest zamknięta ze względu na działania dodawania i mnożenia wektorów przez skalar, co jest równoważne prawej stronie równoważności.

[3]W wielu źródłach autorzy stosują rozróżnienie wektora od skalara za pomocą zmiany czcionki (pogrubienie) wektora lub dopisywanie strzałki nad oznaczeniem wektora.

„$\Leftarrow$" Zakładamy, że $\forall\, u, v \in \mathbb{V}_1\ \forall\, x \in \mathbb{X} \quad u+v \in \mathbb{V}_1 \wedge x \cdot u \in \mathbb{V}_1$. Naszym zadaniem jest udowodnić, że $(\mathbb{V}_1, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową, a więc że działania dodawania i mnożenia wektorów przez skalar spełniają warunki od $L1$) do $L8$). Na początek podkreślmy, że każdy wektor z $\mathbb{V}_1$ jest jednocześnie wektorem z p. w. $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{X}$. W pierwszym kroku zajmijmy się własnością dodawania wektorów. Wobec zamkniętości dodawania w $\mathbb{V}_1$ mamy $\forall\, u, v \in \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V} \quad u+v = v+u \in \mathbb{V}_1$, a więc $L4$). Na podstawie tej samej własności otrzymujemy aksjomat $L1$), mianowicie $\forall\, u, v, w \in \mathbb{V}_1 \quad (u+v)+w = u+(v+w) \in \mathbb{V}_1$. W celu udowodnienia własności $L2$) i $L3$) wystarczy pokazać, że $0 \in \mathbb{V}_1$ oraz $\forall\, u \in \mathbb{V}_1$ $\exists\, (-u) \in \mathbb{V}_1$. Obie własności wynikają z tw. 3.1.1 podpunkty a) i c) oraz z założenia o zamkniętości mnożenia wektora przez skalar, rzeczywiście $\forall\, u \in \mathbb{V}_1 \quad 0 \cdot u = 0 \in \mathbb{V}_1,\ (-1) \cdot u = -u \in \mathbb{V}_1$. Warunek $L5$) jest również bezpośrednią konsekwencją założenia o domkniętości mnożenia wektora przez skalar. Dowody pozostałych własności są prostymi konsekwencjami dotychczasowych rozważań.

$\square$

Jako ilustracje wprowadzonych dotychczas pojęć rozpatrzmy następujące przykłady:

Przykład 3.1.2.

1^0 *Przestrzeń zerowa jest podprzestrzenią wektorową każdej przestrzeni wektorowej.*

2^0 *Niech* $\mathbb{V} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} :\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ *będzie przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbb{R}$, *gdzie dodawanie wektorów rozumiemy jako dodawanie macierzy, a mnożenie wektora przez skalar jako mnożenie macierzy przez liczbę. Podzbiór* $\mathbb{V} \supset \mathbb{V}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} :\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ *nie jest podprzestrzenią wektorową* $\mathbb{V}$ *nad* $\mathbb{R}$, *gdyż suma dowolnych dwóch macierzy z* $\mathbb{V}_1$ *do tego zbioru nie należy.*

3^0 *Symbolem* $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$ *oznaczymy zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, który z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianów przez liczbę rzeczywistą jest przestrzenią wektorową nad* $\mathbb{R}$. *Podzbiór* $\mathbb{V} \supset \mathbb{V}_1 = \mathbb{R}_n[x]$ *wielomianów do stopnia* n *włącznie jest podprzestrzenią wektorową* $\mathbb{V}$, *gdyż dowolna suma wielomianów z* $\mathbb{V}_1$ *oraz iloczyn wielomianu z tego zbioru przez dowolną liczbę rzeczywistą pozostaje wielomianem z* $\mathbb{V}_1$ *(p. tw. 3.1.2).*